第1讲 一元二次方程的定义和解法

**一、课程目标**

1．理解一元二次方程的概念和一元二次方程根的意义，会把一元二次方程化为一般形式；  
2．掌握直接开平方法和配方法解一元二次方程，会应用此判定方法解决有关问题；  
3．理解解法中的降次思想，分类讨论与换元思想.

**二、课程内容**

**知识点一 一元二次方程的定义**

**定义:**等号两边都是**整式**，只含有一个未知数，并且未知数的最高次数是2的方程，叫做一元二次方程.  
**注：**  
（1）理解定义，要掌握三个关键点：方程是整式方程；“一元”是指方程中只含有一个未知数；“二次”是指该未知数的最高次数是2，隐含条件是二次项系数不能为0.

**题型一 利用定义识别一元二次方程**

**例1-1** 下列关于的方程是一元二次方程的是（　　）

A． B． C． D．

【思路分析】本题根据一元二次方程的定义解答．一元二次方程必须满足三个条件：（1）是整式方程；（2）只含有一个未知数；（3）未知数的最高次数是2,二次项系数不为0．由这四个条件对四个选项进行验证，满足这三个条件的为正确答案．

【解】A、方程二次项系数可能为0，故错误；  
B、不是整式方程，故错误；  
C、未知数为1次，故错误；  
D、符合一元二次方程的定义，故正确；  
故选：D．

【总结提示】本题考查了一元二次方程的概念，判断一个方程是否是一元二次方程，首先要看是否是整式方程，然后看化简后是否是只含有一个未知数且未知数的最高次数是2,且系数不为0．

**配套练习1-1**

下列方程中，是关于的一元二次方程的是（ ）

A． B．

C． D．

【解】A、原式可化为，整理后为，是一元二次方程，故本选项正确；  
B、分母中含有未知数，是分式方程，故本选项错误；  
C、当时，不是一元二次方程；  
D、原式可化为，即，不是一元二次方程，故本选项错误．  
故选A．

**题型二 利用一元二次方程的定义确定字母的取值**

**例1-2-1** 如果方程是关于的一元二次方程，那么的值为（　　）

A．±3 B．3 C．-3 D．都不对

【思路分析】本题根据一元二次方程的定义解答，一元二次方程必须满足四个条件：  
（1）未知数的最高次数是2；  
（2）二次项系数不为0；  
（3）是整式方程；  
（4）含有一个未知数．据此即可得到，，即可求得的范围．

【解】由一元二次方程的定义可知，  
解得．  
故选C．

【总结提示】要特别注意二次项系数这一条件，当时，上面的方程就是一元一次方程了．

**配套练习1-2-1**

已知关于的方程是一元二次方程，则的值

A．1 B．-1 C．±1 D．不能确定

【解】∵关于的方程是一元二次方程，  
∴且，  
即且，  
解得： ．  
故选B．

**例1-2-2** 若方程是关于的一元二次方程，则的取值范围是（　　）

A． B． C． D．

【思路分析】本题根据一元二次方程的定义和二次根式有意义的条件求解．  
一元二次方程必须满足两个条件：  
（1）未知数的最高次数是2；  
（2）二次项系数不为0．  
由这两个条件以及得到相应的关系式，再求解即可．

【解】根据题意得，解得．  
故选D．

**配套练习1-2-2**

方程是关于的一元二次方程，则（　　）

A． B． C． D．

【解】由一元二次方程的定义可得，解得：．故选B．

**知识点二 一元二次方程的一般形式**

一般地，任何一个关于的一元二次方程，经过整理,都能化成如下形式: ****.这种形式叫做一元二次方程的一般形式，其中是二次项,**** 是二次项的系数,****是一次项，****是一次项的系数，****是常数项.

**注：**

(1),当****时，方程才是一元二次方程,但****,****可以是O.  
(2)将一个一元二次方程化成一般形式,可以通过**去分母、去括号、移项、合并同类项**等步骤.  
(3)指出一元二次方程的某项时,应连同未知数的系数一起；指出某项系数时应连同它前面的符号一起.  
(4)二次项系数不等于零是一元二次方程的必要条件.

**易错警示:**  
(1)忽略一元二次方程中二次项系数****的条件.

**题型一 利用一元二次方程的一般形式确定各项及其系数**

**例2-1** 把方程化成一元二次方程的一般形式，并写出其中的二次项系数，一次项系数及常数项．

【思路分析】根据去括号、移项、合并同类项，可得一元二次方程的一般形式，根据，是二次项系数，****是一次项系数，****是常数项，可得答案．

【解】去括号、移项、合并同类项，得  
，  
6是二次项系数，-9是一次项系数，-8是常数项．

【总结提示】本题考查了一元二次方程的一般形式，****是一元二次方程的一般形式，是二次项系数，****是一次项系数，****是常数项，注意移项要变号．确定各项系数时，不要忽略系数的符号.

**配套练习2-1**

将一元二次方程化为一般形式，并写出它的二次项系数、一次项系数和常数项.

【解】

化简得

即它的二次项系数是1，一次项系数是－3，常数项是－7.

故答案为：

1，－3，－7.

**知识点三 （难点）一元二次方程的解**

**定义：**能使一元二次方程左右两边相等的**未知数**的值叫做一元二次方程的解(根).  
**注：**判断某个数是方程的根的条件：使方程左右两边相等.

**题型一 利用一元二次方程根的定义验证解**

**例3-1** 下面哪些数是方程的根？ -3、-2、-1、0、1、2、3

【思路分析】方程的根即方程的解，就是能使方程左右两边相等的未知数的值，将的值分别代入已知方程进行一一验证即可作出正确的判断．

【解】将代入方程，左式，即左式≠右式，故不是方程的根．  
同理可得， 时，都不是方程的根，  
当时，左式=右式，故都是方程的根．

【总结提示】一般地，一元二次方程的根不止一个,只要符合定义都是方程的根.

**配套练习3-1**

下表是某同学求代数式的值的情况,根据表格可知方程的根是 ( )

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | … |
|  | 6 | 2 | 0 | 0 | 2 | 6 | … |

A. B. C. D.

【答案】D

**题型二 利用方程的解求方程中待定字母的值**

**例3-2**(中考真题) 若关于的方程有一个根为-1，则的值为( )

A．-2 B．2 C．4 D．-3

【思路分析】根据一元二次方程的解的定义，把代入方程得到关于的一次方程，然后解此一次方程即可．

【解】把代入方程得，  
解得．  
故选B．

【总结提示】若已知一元二次方程的解求方程中待定系数的值，则根据一元二次方程的解的定义，将解替换方程中的未知数,然后通过解方程求出待定系数的值.

**配套练习3-2**

**(中考真题)**已知关于的一元二次方程有一个实数根为-1，求的值及方程的另一实根.

【解】因为方程有一个实数根-1，所以将代入原方程得，

即，解得，.

将代入原方程得，解得，.

所以的值为0或2，方程的另一实根为0.

**题型三 利用一元二次方程根的定义求代数式的值**

**例3-3** 已知是方程的解，求的值.

【思路分析】根据方程的解的定义，将作为未知数的值代入方程中，得到关于的等量关系，然后分析待求值式子的结构，直接代入或变形后代入求值.

【解】把代入，得，

∴，变形可得：.

∴

【总结提示】如果是方程的解，则有式子成立.当求含有的代数式的值时，找出该代数式与相类似的结构进行整体代入求值.

**配套练习3-3**

已知是一元二次方程的一个根,求 的值.

【解】是一元二次方程的一个根,  
,  
原式   
  
   
  
.

**知识点四 用直接开平方法解一元二次方程（重点）**

**1.定义:**利用**平方根**的意义，直接开平方求一元二次方程的解的方法叫做直接开平方法.  
**2.直接开平方法求方程的解的方法:**

（1）；

（2）；

（3）.

**3.易错警示:**直接开平方法利用的是平方根的意义,所以要注意两点:  
(1)不要只取正的平方根而遗漏负的平方根；  
(2)只有非负数才有平方根,所以直接开平方法的前提条件是中.

**题型一 利用直接开平方法解一元二次方程**

**例4-1** 用直接开平方法解下列方程：

（1）；（2）；

【思路分析】（1）先利用方程两边同时除以9，再利用开平方求解即可；（2）先移项，再利用开平方，再移项求解即可.

【解】（1）；  
方程两边同时除以9得，，  
利用开平方得，．

（2）；  
移项得，，  
利用开平方得，，  
移项得：．

**配套练习4-1**

用直接开平方法解下列方程：

（1）

（2）；

【解】

（1）∵，  
直接开平方得：  
，  
∴．

（2）；  
移项得，，  
利用开平方得，；

**题型二 利用直接开平方的意义求值**

**例4-2**(中考真题)若一元二次方程的两个根分别是与，则= .

【思路分析】利用直接开平方法得到，得到方程的两个根互为相反数，所以，解得，则方程的两个根分别是2与-2，则有，然后两边平方得到．

【解】由题意两根不相等，  
∵，  
∴，  
∴方程的两个根互为相反数，  
∴，解得，  
∴一元二次方程的两个根分别是2与-2，  
∴，  
∴．  
故答案为：4．

**配套练习4-2**

若一元二次方程有实数根，则的取值范围是\_\_\_\_\_.

【解】∵一元二次方程有实数根

∴

∴

故答案为：.

**知识点五 用配方法解一元二次方程（重点）**

**1.配方及配方法**  
(1)配方就是将一个多项式配成完全平方的形式.  
(2)配方法:通过配成完全平方形式来解一元二次方程的方法.  
**注：**对一个二次三项式的配方，关键就是扣住完全平方式的结构特征.  
**2.用配方法解一元二次方程**  
用配方法解一元二次方程的步骤:(1)配方，将方程化成的形式.

(2)开方，当时,方程有两个不相等的实数根: ;当时，方程有两个相等的实数根: ;当时，方程没有实数根.  
**3.易错警示:**利用配方法解一元二次方程时,**易忘记将二次项系数化为1或方程的两边同时加上一次项系数一半的平方**.

**题型一 利用配方法进行配方**

**例5-1** 填空

（1） =（ ）2；

（2）（ ）[（ ）]2；

（3）（ ）2 .

【思路分析】配方就是要配成完全平方式，根据完全平方式的结构特征，当二次项系数为1时，常数项是一次项系数一半的平方.

【解】（1）25；5 （2）±12；±6 （3）2；9

【总结提示】(1)当二次项系数为1时，已知一次项的系数，则常数项为一次项系数一半的平方； 已知常数项，则一次项系数为常数项的平方根的两倍，注意平方根(0除外)有两个.

(2 )当二次项系数不为1时，则先化二次项系数为1,然后再配方.

**配套练习5-1**

用适当的数填空：(1)\_\_\_\_\_\_\_\_(\_\_\_\_\_\_\_\_) 2 ；

(2)\_\_\_\_\_\_\_\_ (\_\_\_\_\_\_\_\_) 2 ．

答案：(1)4、2；(2)(±3)、(±)

**题型二 用配方法解一元二次方程**

**例5-2** 用配方法解下列方程：

（1）；

（2）．

（3）；

【思路分析】(1)移项，配方．开方，即可得出两个一元一次方程，求出方程的解即可；  
(2)移项，系数化成1，配方．开方，即可得出两个一元一次方程，求出方程的解即可;

(3)把方程看作关于的一元二次方程，则利用配方法得到，然后利用直接开平方法解方程；  
【解】(1)，  
，  
，  
，  
，  
；

(2)，  
，  
，  
，  
，  
，  
．

(3)，  
，  
，  
，  
所以；

**配套练习5-2**

用配方法解下列方程：

（1）；

（2）．

【解】（1）方程变形得：，

解得：；

（2）方程变形得： ，

配方得：，即，

开方得：，

解得：．

**题型三 利用配方法求最值**

**例5-3** 当取何值时，代数式的值最小？并求出这个最小值.

【思路分析】求代数式的最小值，要先将代数式配成的形式，然后根据完全平方的非负性求代数式的最小值.

【解】



即当时，的值最小，最小值为.

【总结提示】1.代数式配成后，若,则当时，代数式取得最小；若,则当时，代数式取得最大值.  
2.**对代数式的配方和对方程的配方有两点区别：**

(1)将二次项系数化为1时，代数式是提出二次项系数，而方程是两边直接除以二次项系数；

(2)配方时，代数式是先加上一次项系数一半的平方，再减去一次项系数一半的平方，而方程是两边同时加上一次项系数一半的平方.

**配套练习5-3**

求代数式的最小值；

解：



∵

∴

∴的最小值是.